# Введение

-алгоритм (эпсилон – алгоритм) был предложен Питером Винном в 1956 году для вычисления преобразования Шенкса, и до сих пор является одним из самых важных алгоритмов ускорения сходимости, используемых в Численном Анализе, Методах решения уравнений, включая дифференциальные и интегральные, а так же во многих других сферах.

Ускорение достигается за счет преобразования (трансформации) последовательности.   
Последовательность , которая расходится или сходится так медленно, что практически не применима, превращается, с помощью функции ,в последовательность, которая сходится быстрее

Считается, что функция ускоряет сходимость, если сходится к S быстрее, чем

Трансформация последовательности позволяет улучшить сходимость и/или значительно уменьшить количество необходимых итераций.

Одним из первых методов ускорения сходимости является алгоритм (Дельта 2), открытый Александром Эйткеном в 1926 году. Метод Эйткена не является теоритически обоснованным, но при приближенных значениях параметров позволяет увеличить скорость сходимости [1].

*Метод Эйткена*

Пусть

где и некоторые константы. Тогда:

Следовательно,

Откуда получаем:

Стало быть:

Однако, из – за неточности в качестве следующей итерации мы должны взять значение, близкое к .

Из этого метода и выводится алгоритм :

Обозначим операторы:и

Однако если использовать на для улучшения точности, то это позволит вывести рекурсивную формулу:

(1.2)

особенно хорошо подходит для последовательностей с линейной сходимостью (отклонение от их предела ведет себя до бесконечности, как геометрическая последовательность).

К сожалению, это численно нестабильный алгоритм: рекомендуется вычислять последовательность , а также с большим количеством значащих цифр. Некоторые записи алгоритма меньше распространяют ошибки округления, например:

# Эпсилон - Винн

Обобщением формулы (1.1) является:

(2.1)

Однако, в обобщенной формуле (1.2) для точно не дает (2.1). Вместо этого используется Преобразование Шанкса, которое определено следующим отношением определителей Ханкеля:

Оно полностью соответствует (2.1).

Определители Ханкеля в Преобразовании Шанкса могут быть вычислены нелинейной рекурсией:

Эта рекурсивная схема довольно сложна, и -алгоритм Винна существенно упрощает ее:

(2.2)

Теорема Вина

-алгоритм является обобщением устаревшего алгоритма

[1]

55-56 страницы

Московский Государственный Университет. Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Лекции по курсу «Численные методы» Н.И. Ионкин

<http://cmcstuff.esyr.org/vmkbotva-r15/3%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81/6%20%D0%A1%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D1%81%D1%82%D1%80/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B/%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8.pdf>

[88, Eq. (5.1-4)] – про подтверждения Дельта - 2

[70, Eq. (2)] - Ханкель

[101, Theorem on p. 91] - Эпсилон

Acceleration of convergence for numerical sequences Clément Vincent, Mohamed Khelif

<https://hal.science/hal-04207550/document>

Construction of new generalizations of Wynn’s epsilon and rho algorithm by solving finite difference equations in the transformation order Xiang-Ke Chang1,2 · Yi He3 · Xing-Biao Hu1,2 ·Jian-Qing Sun4 · Ernst Joachim Weniger5

<https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-019-00695-w>